

Méthode des éléments finis

Partie 1: Modélisation élastique linéaire

Master sciences et génie des matériaux

Parcours Modélisation et Simulations en

Mécanique

Jia Li

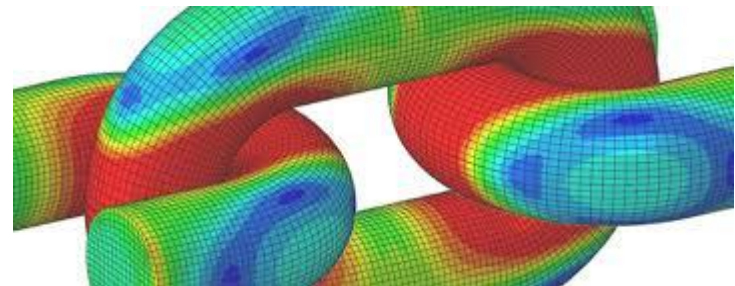
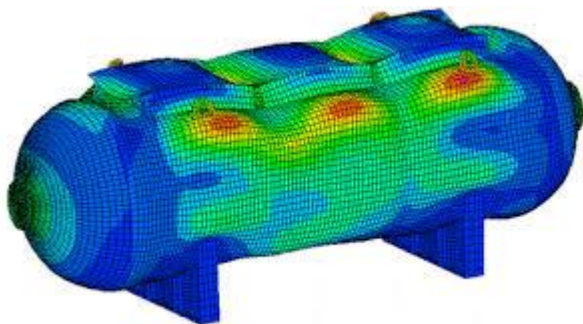
1: Méthode des éléments finis: qu'est-ce que c'est?

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques tels que

- diffusion thermique
- mécanique des milieux continus (solides et fluides)
- électromagnétisme et électrostatique
- Problèmes multi-physiques

absolument tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) aux limites.

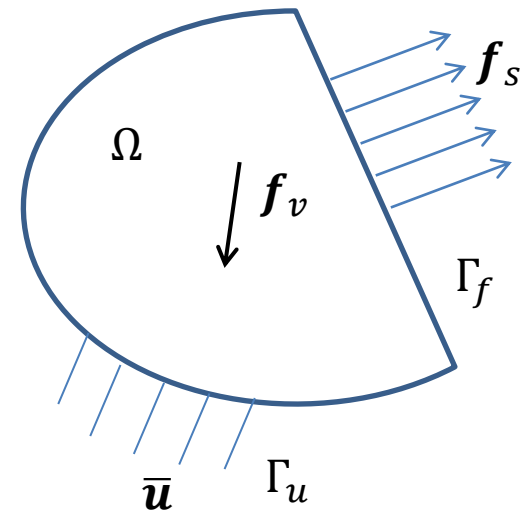
Il s'agit de trouver une approximation discrète.



2: Problème fondamental d'élasticité linéaire

On considère un solide élastique linéaire en équilibre statique représenté par un domaine 3D $\Omega \in R^3$. Le solide est soumis à une densité volumique d'effort $\mathbf{f}_s$ et une densité surfacique d'effort $\mathbf{f}_v$ sur une partie de sa frontière Γ_f , l'autre partie de la frontière Γ_u est imposée d'un déplacement $\bar{\mathbf{u}}$. Trouver les champs $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ tels que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + f_{vi} = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} n_j = f_{si} \quad \text{sur } \Gamma_f \\ u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$



2: Formalismes énergétiques et principes variationnels

2.1: Notions de base

1: Densité de l'énergie de déformation:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Cas d'élastique linéaire:

$$U_0 = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\boldsymbol{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

Energie de déformation du solide Ω

$$U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\boldsymbol{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} d\Omega$$

2: Formalismes énergétiques et principes variationnels

2: Densité de l'énergie complémentaire:

$$U^*_0 = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}$$

Cas d'élastique linéaire:

$$U^*_0 = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{C}]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}\}$$

Energie complémentaire du solide Ω

$$U^* = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{C}]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega$$

Relation entre U_0 et U^*_0 :

$$U_0 + U^*_0 = \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

Loi de comportement:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U^*_0}{\partial \sigma_{ij}}$$

2: Formalismes énergétiques et principes variationnels

3: Energie potentielle des forces extérieures:

$$U_e = - \int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{u}\} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{u}\} d\Gamma$$

4: Energie potentielle totale:

$$\Pi = (U + U_e) = \int_{\Omega} U_0 d\Omega - \int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{u}\} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{u}\} d\Gamma$$

5: Energie complémentaire des déplacements:

$$U_e^* = - \int_{\Gamma_u} \{\mathbf{R}\}^T \{\bar{\mathbf{u}}\} d\Omega$$

6: Energie complémentaire totale:

$$\Pi_e^* = U^* + U_e^* = \int_{\Omega} U_0^* d\Omega - \int_{\Gamma_u} \{\mathbf{R}\}^T \{\bar{\mathbf{u}}\} d\Omega$$

2: Formalismes énergétiques et principes variationnels

7: Travail des contraintes :

$$W_{int} = - \int_{\Omega} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} d\Omega$$

8: Travail des forces extérieures:

$$W_{ext} = \int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{u}\} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{u}\} d\Gamma$$

9: Champs de déplacement virtuel cinématiquement admissible

Un champ de déplacement virtuel $\{\mathbf{v}\}$ est dit cinématiquement admissible si $\{\mathbf{v}\}$ est continu et dérivable dans Ω et s'il satisfait les conditions aux limites de déplacements imposés $\{\mathbf{v}\} = \{\bar{\mathbf{u}}\}$ sur Γ_u .

10: Champ de contrainte virtuelle statiquement admissible

Un champ de contrainte virtuelle $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ est dit statiquement admissible si $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ est dérivable dans Ω et s'il satisfait les conditions d'équilibre:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_{vi} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = f_{si} & \text{sur } \Gamma_f \end{cases}$$

2: Formalismes énergétiques et principes variationnels

2.2: Principe des travaux virtuels

Pour tout corps déformable, les travaux virtuels des forces en équilibre associées aux déplacements cinématiquement admissibles sont nuls.

Le travail des forces extérieures associé aux déplacements virtuels:

$$W_{ext} = \int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{v}\} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{v}\} d\Gamma$$

Le travail des contraintes associé aux déformations virtuelles:

$$W_{int} = - \int_{\Omega} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}_v\} d\Omega$$

Avec $\varepsilon_{vij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$

Selon le principe des travaux virtuels:

$$W_{ext} + W_{int} = 0$$

$$\int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{v}\} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{v}\} d\Gamma - \int_{\Omega} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}_v\} d\Omega = 0$$

2: Formalismes énergétiques et principes variationnels

2.3: Principe de l'énergie potentielle totale

Pour tout corps déformable, la variation de l'énergie potentielle totale est nulle lors d'un déplacement virtuel cinématiquement admissible:

$$\delta\Pi = \delta(U + U_e) = \delta \left[\int_{\Omega} U_0 d\Omega - \int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{u}\} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{u}\} d\Gamma \right] = 0$$

De plus, parmi tous les déplacements virtuels cinématiquement admissibles, les déplacements réels rendent l'énergie potentielle totale minimale:

$$\Pi(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \geq \Pi(\mathbf{u})$$

2.4: Principe de l'énergie complémentaire totale

Pour tout corps déformable soumis aux contraintes virtuelles statiquement admissible, la variation de l'énergie complémentaire totale est nulle:

$$\delta\Pi^* = \delta(U^* + U_e^*) = \delta \left[\int_{\Omega} U^*_0 d\Omega - \int_{\Gamma_u} \{\mathbf{R}\}^T \{\bar{\mathbf{u}}\} d\Gamma \right] = 0$$

De même, parmi toutes les contraintes virtuelles statiquement admissibles, les contraintes réelles rendent l'énergie complémentaire totale minimale:

$$\delta\Pi^*(\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \geq \delta\Pi^*(\boldsymbol{\sigma})$$

2: Formalismes énergétiques et principes variationnels

2.4: Méthode de Ritz: Application du principe de l'énergie potentielle totale

Soit

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{m=0}^M a_m \mathbf{u}_m$$

$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_m$ sont des fonctions continues et dérivables dans Ω , $\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$ sur Γ_u , a_m sont des constantes à déterminer. Donc $\mathbf{u}$ est un champ de déplacement cinématiquement admissible.

On calcule la variation de l'énergie potentielle totale:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} \delta a_m = \sum_{m=0}^M \left(\frac{\partial U}{\partial a_m} - \int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{u}_m\} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{u}_m\} d\Gamma \right) \delta a_m = 0$$

δa_m étant indépendants et arbitraires, ce qui donne:

$$\frac{\partial U}{\partial a_m} - \int_{\Omega} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{u}_m\} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{u}_m\} d\Gamma = 0$$

C'est un système d'équations linéaires de a_m avec lequel les constantes a_m peuvent être déterminées.

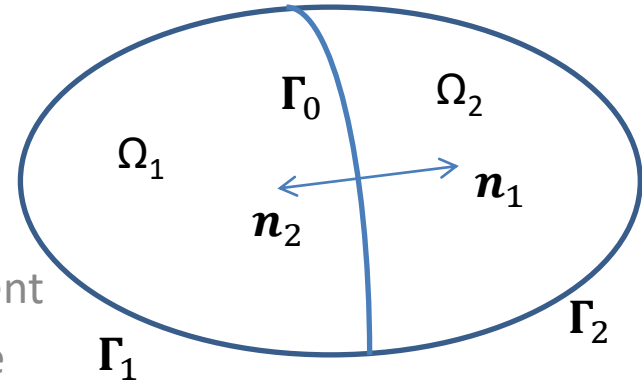
3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.1: Principes variationnels en sous domaine

Considérons un domaine divisé en deux sous domaines, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$. Les champs de contrainte, de déformation et de déplacement sont représentés par $\boldsymbol{\sigma}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et $\mathbf{u}^e$ respectivement.

L'énergie potentielle totale:

$$\Pi = \sum_{e=1}^2 \left[\int_{\Omega_e} U_0 d\Omega - \int_{\Omega_e} \{\mathbf{f}_v\}^T \{\mathbf{u}\} d\Omega - \int_{\Gamma_{fe}} \{\mathbf{f}_s\}^T \{\mathbf{u}\} d\Gamma \right]$$



Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissible, le champ de déplacement réel rend l'énergie potentielle totale minimale si

$$\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 = \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0.$$

Soit: $\delta\Pi = 0, \Pi(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \geq \Pi(\mathbf{u})$

3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.2: Approche de la méthode des éléments finis

- Discrétisation de la structure $\Omega = \bigcup \Omega^e$, Ω^e dit l'élément e , représenté par des points remarquables, dit des nœuds;
- Numérotation des nœuds. On distingue une numérotation globale de tous les nœuds et une numérotation locale dans un élément;
- Approximation du champ de déplacement dans un élément par interpolation:

$$\{\mathbf{u}^e\} = [\mathbf{N}(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}^e\}$$

$[\mathbf{N}(\mathbf{x})]$: matrice de fonctions d'interpolation (fonctions de forme);

$\{\mathbf{q}^e\}$: vecteur des déplacements nodaux.

Propriété importante de $N(x)$: $N_i(x_j) = \delta_{ij}$

- Calcul des vecteurs de déformation et de contrainte

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = [\mathbf{D}][\mathbf{N}(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}^e\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{q}^e\}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}^e\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = [\mathbf{C}][\mathbf{B}]\{\mathbf{q}^e\}$$

$[\mathbf{D}]$: matrice d'opérateur différentielle

$[\mathbf{B}] = [\mathbf{D}][\mathbf{N}(\mathbf{x})]$: matrice de déformation

3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.2: Approche de la méthode des éléments finis

- Application du principe de l'énergie potentielle totale par élément

$$\delta\Pi = \delta\{\mathbf{q}^e\}^T \frac{\partial\Pi}{\partial\{\mathbf{q}^e\}^T} \delta\{\mathbf{q}^e\}^T = \delta\{\mathbf{q}^e\}^T ([\mathbf{K}^e]\{\mathbf{q}^e\} - \{\mathbf{F}^e\}) = 0$$

Ce qui donne:

$$[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{q}^e\} = \{\mathbf{F}^e\}$$

Propriétés de $[\mathbf{K}^e]$:

- 1: singulière;
- 2: symétrique;
- 3: définie positive.

- Assemblage des $[\mathbf{K}^e]$ et de $\{\mathbf{F}^e\}$

On a obtenu un système d'équations linéaires pour chaque éléments, il faut combiner ces équations dans un seul système d'équations tel que:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Il s'agit d'assembler $[\mathbf{K}^e]$ dans $[\mathbf{K}]$ et $\{\mathbf{F}^e\}$ dans $\{\mathbf{F}\}$.

$[\mathbf{K}]$ et $\{\mathbf{F}\}$ sont la matrice de rigidité globale et le vecteur de force généralisée globale respectivement.

3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.2: Approche de la méthode des éléments finis

- Prise en compte des conditions aux limites en déplacements

Dans le vecteur de déplacements nodaux $\{q\}$, certains composants sont connus grâce aux conditions aux limites en déplacements qui doivent être prise en compte en utilisant des méthodes spéciales.

- Résoudre le système d'équations linéaires pour dégager le vecteur de déplacements nodaux $\{q\}$.
- Calcul des déformations et des contraintes dans tous les éléments

$$\{\epsilon^e\} = [B]\{q^e\}$$

$$\{\sigma^e\} = [C]\{\epsilon^e\}$$

3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.3: Exemple: Barre de longueur L , de section A et de masse volumique ρ , encastree à une extrémité et soumise à son poids propre.

- Discrétisation: la structure est divisée en deux éléments linéique à deux nœuds, nommés I et II.
- Numérotation globale: 3 nœuds numérotés 1,2,3. Numérotations locale: 2 nœuds par éléments nommés 1, 2.
- Interpolation de déplacement: dans élément e , on écrit le champ de déplacement en fonction du vecteur de déplacement nodaux $\{q^e\} = \begin{Bmatrix} u^e_1 \\ u^e_2 \end{Bmatrix}$ tel que

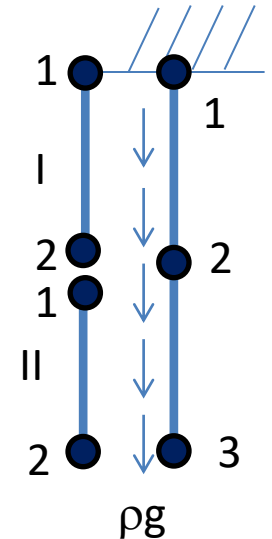
$$\{u^e\} = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{Bmatrix} u^e_1 \\ u^e_2 \end{Bmatrix} = [N]\{q^e\}$$

Pour déterminer les fonctions de forme, on utilise la propriété $N_i(x_j) = \delta_{ij}$. Supposons $N_1(x) = a + bx$, on a $N_1(x_1 = 0) = 1$ et $N_1(x_2 = L/2) = 0$. Ceci nous donne:

$$N_1(x) = 1 - \frac{2x}{L}$$

De même, on trouve:

$$N_2(x) = \frac{2x}{L}$$



3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.3: Exemple

- Matrice de déformation $[B]$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = \frac{d}{dx} \{\mathbf{u}^e\} = [D][N(x)]\{\mathbf{q}^e\} = [B]\{\mathbf{q}^e\}$$

$$[B] = [D][N(x)] = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{L} & \frac{2x}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix}$$

- Matrice de rigidité élémentaire

$$[K^e] = \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega = \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix}^T [E] \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} A dx = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vecteur de forces généralisées:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}^e\} &= \int_{\Omega_e} [N]^T \{\mathbf{f}_v\} d\Omega + \int_{\Gamma_{fe}} [N]^T \{\mathbf{f}_s\} d\Gamma = \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{L} & \frac{2x}{L} \end{bmatrix}^T \{\rho g\} A dx \\ &= AL\rho g/4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.3: Exemple

- Assemblage

Pour élément I, nous avons les équations $[K^e]\{q^e\}=\{F^e\}$

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = AL\rho g/4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Pareillement pour élément II:

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = AL\rho g/4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Pour les combiner en un seul système d'équations, on fait élargir les systèmes précédents:

$$\begin{aligned} \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= AL\rho \frac{g}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= AL\rho g/4 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

L'addition de deux systèmes donne:

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = AL\rho g/4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.3: Exemple

Règle d'assemblage

$$\text{Numérotation globale } \begin{matrix} i & j \\ \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \end{matrix} \quad [K] \quad \begin{matrix} \dots & i & & j & \dots \\ \vdots & k_{ii} & & k_{ij} & \vdots \\ & k_{ji} & & k_{jj} & \\ & & & & j \\ & & & & \vdots \end{matrix}$$

- Prise en compte des conditions aux limites en déplacement

Encastrement au nœud 1: $u_1 = 0$; F_1 inconnue

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ AL\rho g/2 \\ AL\rho g/4 \end{Bmatrix}$$

- Résolution:

$$u_2 = \frac{3L^2\rho g}{8E} \quad u_3 = \frac{L^2\rho g}{2E}$$

3: Application des principes variationnels par la méthode des éléments finis

3.3: Exemple

- Déformations

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{q}^I\} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{3L\rho g}{4E}$$
$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{II}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{q}^{II}\} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L\rho g}{4E}$$

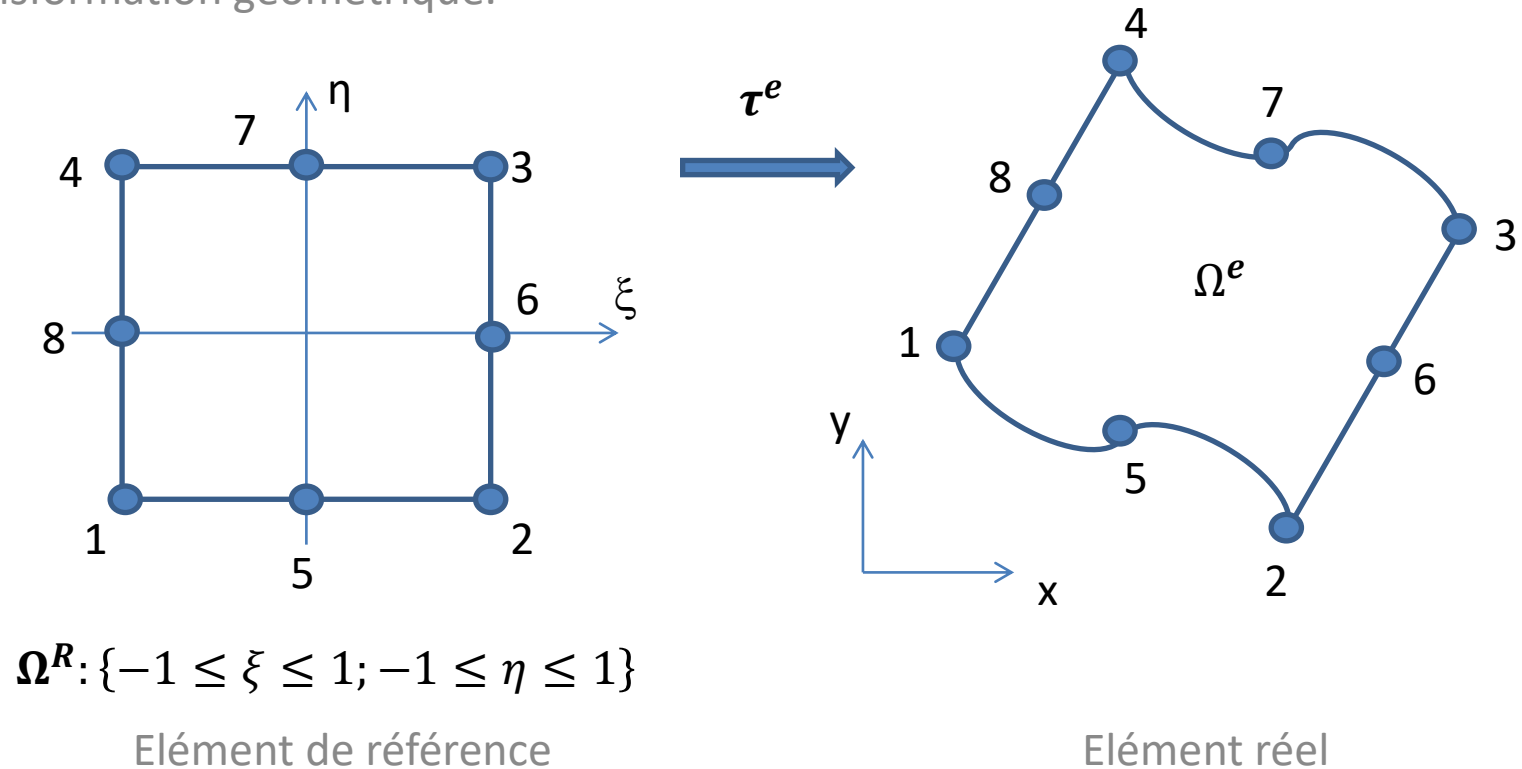
- Contraintes

$$\{\sigma^I\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} = \frac{3L\rho g}{4}$$
$$\{\sigma^{II}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}^{II}\} = \frac{L\rho g}{4}$$

4. Éléments isoparamétriques

4.1: Éléments de référence (élément parent)

Un élément de référence est un élément de forme très simple, Ω^R , repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel Ω^e par une transformation géométrique.



4. Éléments isoparamétriques

Transformation géométrique

La transformation géométrique τ^e définit les coordonnées x de chaque pour l'élément réel à partir des coordonnées ξ du point correspondant de l'élément de référence:

$$\tau^e: \xi \rightarrow x = x(\xi, x_i)$$

x_i : coordonnées des nœuds de l'éléments réel.

Pour être simple, on utilise souvent une transformation linéaire telle que:

$$\{x\} = [\bar{N}(\xi)]\{x_i\}$$

$\bar{N}(\xi)$ est appelée fonction de transformation géométrique.

Propriété de $\bar{N}(\xi)$:

1: Bijectivité : à tout point de Ω^R correspond un point de Ω^e et un seul, et inversement;

La transformation τ^e est bijective si la matrice jacobienne (exemple en 2D)

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

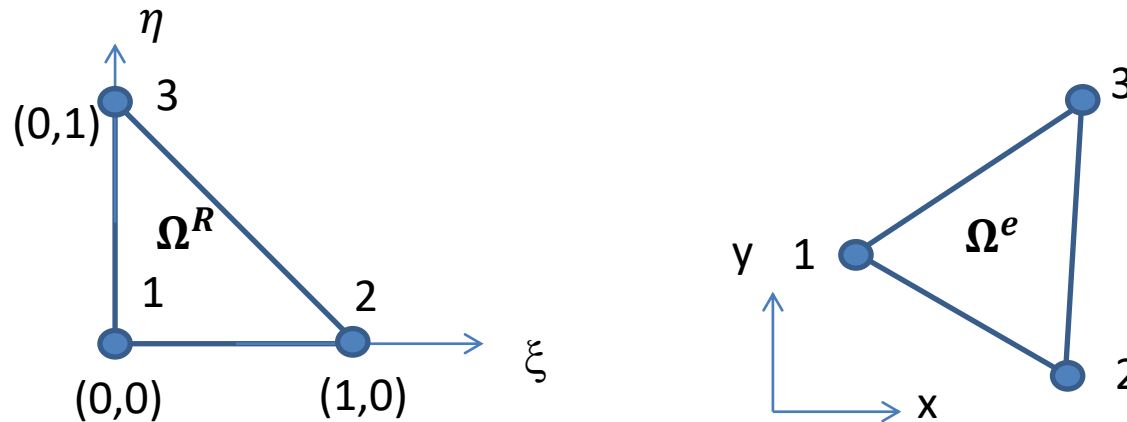
est non singulière, $\det[J] \neq 0$;

2: $x(\xi_i) = x_i$: les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds géométriques de l'élément réel.

4. Éléments isoparamétriques

Transformation géométrique: exemple

La propriété $\mathbf{x}(\xi_i) = \mathbf{x}_i$ exige $\bar{N}_i(\xi_j) = \delta_{ij}$. Ceci nous permet de déterminer $[\bar{N}(\xi)]$ en utilisant la méthode pour $[N(\xi)]$.



Soit $\{\mathbf{x}\} = \{x \ y\}^T$ et $\{\mathbf{x}_i\} = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3\}^T$, nous pouvons trouver:

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

On vérifie facilement les deux propriétés de la transformation géométrique, notamment:

$$\det[\mathbf{J}] = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$$

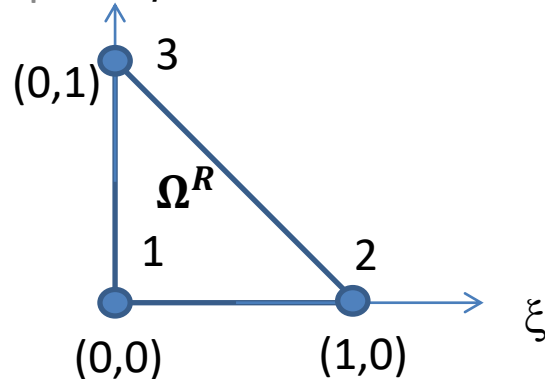
si les trois sommets de l'élément ne sont pas alignés.

4. Éléments isoparamétriques

4.2 Approximation sur un élément de référence

Il s'agit de construire un champ de déplacement en terme de déplacements nodaux, qui est simple sur l'élément de référence.

Exemple: η



Soit: $\{\mathbf{u}\} = \{u \ v\}^T$

$$\{\mathbf{q}^e\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}^T$$

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}(\xi, \eta)]\{\mathbf{q}^e\}$$

Selon la propriété de $[\mathbf{N}]$, il est facile de trouver:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

nous pouvons constater que:

$$[\mathbf{N}(\xi, \eta)] = [\bar{\mathbf{N}}((\xi, \eta))]$$

Lorsque les fonctions d'interpolation de déplacement sont identiques aux fonctions de transformation géométrique, on dit que l'on construit un élément **isoparamétrique**.

4. Éléments isoparamétriques

4.3 Transformation des opérateurs de dérivation

La matrice de rigidité élémentaire est calculée sur l'élément réel:

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [B]^T [C] [B] d\Omega$$

Avec $[B] = [[D]N]$. Dans le cas actuel, $[D]$ est un opérateur différentiel défini dans le repère de global (x,y) , par contre, $N = N(\xi, \eta)$ est définie sur l'espace de référence. Il faut donc opérer une transformation géométrique. Puisque

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Ce que nous notons $\{\partial \xi\} = [J]\{\partial x\}$, nous avons donc:

$$\{\partial x\} = J^{-1}\{\partial \xi\}$$

Le calcul de $[J]$ se fait en utilisant la transformation géométrique:

4. Éléments isoparamétriques

Le calcul de $[J]$ se fait en utilisant la transformation géométrique. Puisque,

$$x = \sum_{i=1}^m \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^m \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) y_i$$

donc

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

Ainsi la matrice de déformation $[B]$ est représenté en fonction de (ξ, η)

4. Éléments isoparamétriques

4.4 Transformation d'une intégrale

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire est rapporté sur l'élément réel Ω^e . Il faut le transformé sur l'élément de référence Ω^R :

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] dx dy = \int_{\Omega^R} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta$$

$$\text{Ici: } d\Omega = dx dy = \vec{\xi}_n d\xi \times \vec{\eta}_n d\eta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} d\xi d\eta = \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta$$

L'avantage de cette transformation est la forme de l'élément de référence Ω^R est très simple. Par contre, l'intégrand devient compliqué tel que une intégration analytique est impossible. L'intégration numérique devient indispensable.

4. Eléments isoparamétriques

4.5 Intégration numérique

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$$

La méthode la plus utilisée est la quadrature de Gauss:

$$I = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i$$

ξ_i : points d'intégration (points de Gauss);

w_i : coefficients de pondération (poids).

Ils sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynôme d'ordre $m \leq 2n-1$.

L'extention en 2D ou 3D est directe:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j$$

Quadrature de Gauss (1D)			
m_G	Points d'intégration ξ_i	Poids d'intégration w_i	Degré de précision
1	0	2	1
2	-0,577 350 269 189 625 +0,577 350 269 189 625	1 1	3
3	-0,774 596 669 241 483 0,0 +0,774 596 669 241 483	0,555 555 555 555 556 0,888 888 888 888 889 0,555 555 555 555 556	5
4	-0,861 136 311 594 052 -0,339 981 043 584 856 +0,339 981 043 584 856 +0,861 136 311 594 052	0,347 854 845 137 454 0,652 145 154 862 545 0,652 145 154 862 545 0,347 854 845 137 454	7
5	-0,906 179 845 938 664 -0,538 469 310 105 683 0,0 +0,538 469 310 105 683 +0,906 179 845 938 664	0,236 926 885 056 189 0,478 628 670 499 365 0,568 888 889 888 889 0,478 628 670 499 365 0,236 926 885 056 189	9